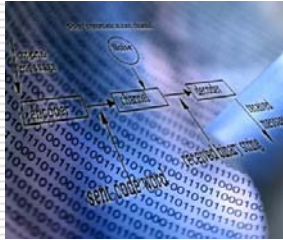


## Kapitel 8: Optimalcodierung II



## Ziele des Kapitels

ETH


- Shannon-Fano Coding
- Arithmetic Coding

## Shannon-Fano Coding

ETH

- Ein weiteres wichtiges, klassisches Verfahren ist das **Shannon-Fano Verfahren**: Gegeben sind die Codewort-Wahrscheinlichkeiten  $[p_1 \dots p_L]$ :

1. Ordne die Wahrscheinlichkeiten nach fallenden Werten
2. Teile das Feld in zwei Gruppen, so dass jede Gruppe möglichst gleich grosse Teilsummen besitzt (Entropiemaximierung)
3. Weise der ersten Gruppe eine 0 zu, der zweiten Gruppe eine 1
4. Wiederhole 2. und 3. bis jede Gruppe nur noch ein Element enthält

 Codewortlängen ergeben sich zwangsläufig, wobei entsprechend nach dem Optimierungsprinzip  $l_j = 1/p_j$  auf- bzw. abgerundet wird

## Shannon-Fano Coding

ETH

- Gegeben sei eine diskrete Quelle mit Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P_X(x) = [0.18; 0.10; 0.40; 0.08; 0.05; 0.05; 0.14]$$

Sym	$p_j$	1	2	3	4	Codewörter	Länge $l_j$	$p_j \cdot l_j$
a	0.4		0			00	2	0.80
b	0.18	0	1			01	2	0.36
c	0.14	1		0		100	3	0.42
d	0.1		0	1		101	3	0.30
e	0.08		1	0		110	3	0.24
f	0.05			1	0	1110	4	0.20
g	0.05				1	1111	4	0.20

## Shannon-Fano Coding

ETH

$$\square E[l_c(x)] = \sum p_j \cdot l_j = 2.52$$

$$\square H(X) = -0.4 \cdot \log 0.4 - 0.18 \cdot \log 0.18 - 0.14 \cdot \log 0.14 - 0.1 \cdot \log 0.1 - 0.08 \cdot \log 0.08 - 2 \cdot 0.05 \cdot \log 0.05 = 2.43 \text{ Bit/QZ}$$

- Coderedundanz ist damit

$$R_c = E[l_c(x)] - H(X) = 2.52 \text{ Bits/QZ} - 2.43 \text{ Bit/QZ} = 0.09 \text{ Bits/QZ}$$

## Bemerkungen

ETH

- Shannon-Fano Coding kann suboptimal sein
- Es kann gezeigt werden, dass die mittlere Codelänge wie folgt begrenzt ist:

$$H(X) \leq E[l_c(X)] \leq H(X) + 1$$

- Wir erhalten also die gleichen Grenzen, wie bei Huffman-Coding
- Dieses Verfahren ist nicht immer eindeutig
- Es kann durchaus mehrere Codes geben, die gleiche Coderedundanz aufweisen
- Praktisch weniger relevant

## Shannon-Fano vs. Huffman **ETH**

- Gegeben: Quellalphabet mit 5 Symbolen {A,B,C,D,E}

Symbol	$P(x)$	S-F Code	Huffman
A	0.35	00	1
B	0.17	01	011
C	0.17	10	010
D	0.16	110	001
E	0.15	111	000
		$E[l] = 2.31$	$E[l] = 2.3$

## Erweiterte Quellen **ETH**

- Wir erinnern uns an das Konzept der erweiterten Quellen
- Es gilt für die mittlere Codelänge

$$mH(X) \leq mE[l_c(X)] < mH(X) + 1$$

- Sowie für die Coderedundanz

$$R_c < \frac{1}{m}$$

## Shannon-Fano Coding (m=1) **ETH**

- Gegeben eine Binärquelle mit unabhängigen Zeichen und den Auftretswahrscheinlichkeiten  $p_1 = 0.2$  und  $p_2 = 0.8$

- $E[l_c(x)] = 1$

- $H(X) = -0.2 \cdot \log 0.2 - 0.8 \cdot \log 0.8$   
 $= 0.722 \text{ Bit/QZ}$

- $R_c = E[l_c(x)] - H(X) = 0.278 \text{ Bits/QZ}$

## Shannon-Fano Coding (m=2) **ETH**

- Wir erhalten eine erweiterte Quelle  $X^2 = \{(x_1 x_1), (x_1 x_2), (x_2 x_1), (x_2 x_2)\}$
- Mit den zugehörigen Auftretswahrscheinlichkeiten  
 $p_1^2 = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$   $p_2^2 = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16$   
 $p_3^2 = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$   $p_4^2 = 0.8 \cdot 0.8 = 0.64$
- Anwendung des Shannon-Fano Algorithmus

$p_j^2$	Code	$p_j^2 \cdot l_j$
0.64	0	0.64
0.16	10	0.32
0.16	110	0.48
0.04	111	0.12

## Shannon-Fano Coding (m=2) **ETH**

- $m \cdot E[l_c(x)] = \sum p_j^2 \cdot l_j = 1.56$   
 $\Rightarrow E[l_c(x)] = \frac{1.56}{2} = 0.780$

- $H(X) = -0.2 \cdot \log 0.2 - 0.8 \cdot \log 0.8$   
 $= 0.722 \text{ Bit/QZ}$

- $R_c = E[l_c(x)] - H(X) = 0.058 \text{ Bits/QZ}$

## Shannon-Fano Coding (m=3) **ETH**

	$p_j^3$	$p_j^3$ geordnet	Code	$p_j^3 \cdot l_j$
$p_1 p_1 p_1$	0.512	0.512	0	0.512
$p_1 p_1 p_2$	0.128	0.128	100	0.384
$p_1 p_2 p_1$	0.128	0.128	101	0.384
$p_1 p_2 p_2$	0.032	0.128	110	0.384
$p_2 p_1 p_1$	0.128	0.032	11100	0.160
$p_2 p_1 p_2$	0.032	0.032	11101	0.160
$p_2 p_2 p_1$	0.032	0.032	11110	0.160
$p_2 p_2 p_2$	0.008	0.008	11111	0.040

## Shannon-Fano Coding (m=3) **ETH**

- $m \cdot E[l_c(x)] = \sum p_j^3 \cdot l_j = 2.184$   
 $\Rightarrow E[l_c(x)] = \frac{2.184}{3} = 0.728$
- $H(X) = -0.2 \cdot \log 0.2 - 0.8 \cdot \log 0.8$   
 $= 0.722 \text{ Bit/QZ}$
- $R_c = E[l_c(x)] - H(X) = 0.006 \text{ Bits/QZ}$

Optimal Informationstheorie 13  
 Codierung II Copyright M. Gross, ETH Zürich 2005, 2006

## Arithmetic Coding **ETH**

- Die generelle Zuordnung von  $l_j = 1/p_j$  führt zu einer optimalen Codierung an der Entropiegrenze
- Huffman Codes sind optimal und in  $O(n)$  erzeugbar
- Typischerweise muss man die Codelängen aufrunden
- Die Coderedundanz liegt daher innerhalb von einem Bit der Quellenentropie
- Blockcode helfen weiter, das Rundungsproblem bleibt jedoch
- **Idee:** Codiere einen String als reelle Zahl  $0 \leq R < 1$

Optimal Informationstheorie 14  
 Codierung II Copyright M. Gross, ETH Zürich 2005, 2006

## Arithmetic Coding **ETH**

- **Arithmetische Codierung:**  
 Gegeben sind die Codewort-Wahrscheinlichkeiten  $[p_1 \dots p_L]$  aller Zeichen der Quelle sowie ein String  $s = x_1 // \dots // x_S$  der Länge  $S$ .
  1. Teile das Intervall  $[0,1)$  in Subintervalle gemäss der Symbol-Wahrscheinlichkeiten  $p_i$
  2. Nimm das nächste Symbol  $x_i$  aus dem String und ermittle das Subintervall, welches seiner Wahrscheinlichkeit  $P(x_i)$  entspricht
  3. Teile dieses Intervall gemäss der Symbolwahrscheinlichkeiten, so wie in Schritt 1
  4. Führe die Schritte 2 und 3 aus, bis der String zu Ende ist
  5. Weise den Binärcode einer Zahl aus diesem Intervall dem String zu

Optimal Informationstheorie 15  
 Codierung II Copyright M. Gross, ETH Zürich 2005, 2006

## Arithmetic vs. Huffman **ETH**

- Code 1: Gegeben  $\chi = \{a, e, i, o, u\}$  sowie  $p(a)=0.12$ ,  $p(e)=0.42$ ,  $p(i)=0.09$ ,  $p(o)=0.3$  und  $p(u)=0.07$
- Huffman:  
 Beispielstring:  $s = \text{„iou“}$   
 $\Rightarrow 1011111010 = 10 \text{ Bit}$
- Arithmetic-Coding:  
 Beispielstring:  $s = \text{„iou“}$   
 $\Rightarrow .011000001 = 9 \text{ Bit}$

Optimal Informationstheorie 16  
 Codierung II Copyright M. Gross, ETH Zürich 2005, 2006

## Arithmetic Coding **ETH**

- Insbesondere können die neuen Grenzen mit folgenden beiden Gleichungen berechnet werden
  - $\text{newleft} = \text{prevleft} + \text{left}[x[i]] \cdot \text{prevsize}$
  - $\text{newsize} = \text{prevsize} \cdot \text{size}[x[i]]$
- Hierbei sind  $\text{left}[x[i]]$  die linke Intervallgrenze des aktuellen Symbols  $x_i$  sowie  $\text{size}[x[i]]$  seine Wahrscheinlichkeit
- Die Grösse des resultierenden Intervalls ergibt sich aus dem Produkt der Symbolwahrscheinlichkeiten des Strings

$$P(s) = \prod_{i=1}^S P_X(s(i))$$

Optimal Informationstheorie 17  
 Codierung II Copyright M. Gross, ETH Zürich 2005, 2006

## Arithmetic Coding **ETH**

- Zur Codierung dieses Intervalls benötigen wir

$$-\log_2 P(s) = -\sum_{i=1}^S \log_2 P_X(s(i)) \text{ Bit}$$

- Ist  $S$  sehr gross, so tauchen die Einzelsymbole gemäss ihrer Wahrscheinlichkeiten auf und die mittlere Codelänge wird

$$\frac{-\log_2 P(s)}{S} = -\frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \log_2 P_X(s(i)) = -\sum_{i=1}^L P_X(x_i) \log_2 P_X(x_i) = H(X)$$

Optimal Informationstheorie 18  
 Codierung II Copyright M. Gross, ETH Zürich 2005, 2006