Constrained Dynamics

Stefan Duthaler

Seminar WS 2003

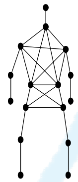
Physically-based methods for

3D games and medical applications

SIGGRAPH i97 COURSE
Andrew Witkin
Carnegie Mellon University

‹ bersicht

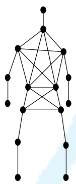
- Motivation
- Einf¸hrendes Beispiel
  - Punkt auf Kreisbahn
- Verallgemeinerung
  - Partikelsystem mit Constraints
  - Implementation
- R¸ckblick
- Quellen
- Film



The particle/stick configuration used in Hitman for representing the human anatomy

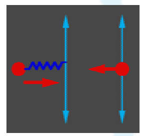
Motivation

- Bewegungsfreiheit der Partikel einschr‰nken
  - Partikel auf Kurven
  - Steife Verbindungen
    - Distanz Constraint
- Newtons Gesetze einhalten



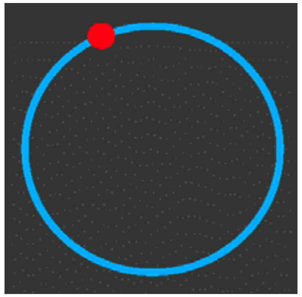
The particle/stick configuration used in Hitman for representing the human anatomy

Motivation



- Feder-Masse Modell?
  - grosse Federkonstante
    - instabil
- Energie-Ansatz / Penalty Methode?
  - indirekte Kommunikation
    - Penaltykr‰fte vs. wirkende Kr‰fte via Partikelposition
- Constraint Kr‰fte!
  - Kr‰fte werden direkt angepasst ...

Punkt auf Kreisbahn



- Gew, nschtes Verhalten:
  - Punkt bewegt sich entlang der Bahn
  - Keine Kraft kann Punkt von der Bahn ziehen

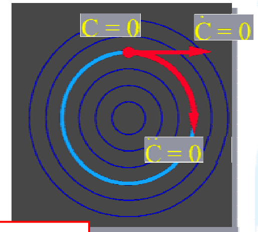
implizites Constraint:

$$\boxed{\mathrm{C}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| - r = 0}$$

$$\mathrm{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 1)$$

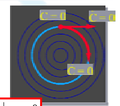
Punkt auf Kreisbahn

- Anfangsbedingungen:
  - Legale Position
  - Legale Geschwindigkeit
- Berechnen:
  - Legale Beschleunigung



$$\boxed{\mathrm{C}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| - r = 0}$$

Punkt auf Kreisbahn



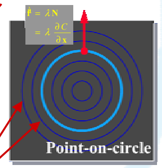
$$\boxed{\mathrm{C}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| - r = 0}$$

$$C(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 1) = 0$$

$$\dot{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\underbrace{\ddot{C}(\mathbf{x}) = \underline{\ddot{\mathbf{x}}}\cdot\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}} = 0 \qquad \ddot{\mathbf{x}} = \underline{\frac{\mathbf{f}+\hat{\mathbf{f}}}{m}}}$$

Constraint Kraft



Hyperebenen

$$\ddot{C}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}+\hat{\mathbf{f}}}{m}\cdot\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{x} = -\mathbf{f}\cdot\mathbf{x} - m\dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}}$$

2 Unbekannte in 1Glg.

Punkt auf Kreisbahn

- Virtuelle Arbeit
  - Energie vom System nicht ver%ndern
  - Arbeit von $\mathbf{f}+\hat{\mathbf{f}}$:
    - $\hat{\mathbf{f}}$ soll keine Arbeit leisten

Kinetische Energie

$$\boxed{T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}}} \qquad \boxed{\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f}+\hat{\mathbf{f}}}{m}}$$

$$\boxed{\dot{T} = m\ddot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{x}} + \boxed{\hat{\mathbf{f}}\cdot\dot{\mathbf{x}}}}$$

$= 0$

$$\hat{\mathbf{f}}\cdot\dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\dot{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \forall\dot{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}} = 0$$

Constraint Kraft zeigt in x Richtung

$$\boxed{\hat{\mathbf{f}} = \lambda\mathbf{x}}$$

Punkt auf Kreisbahn

$\boxed{\hat{\mathbf{f}} = \lambda \mathbf{x}}$

Constraint Kraft zeigt in x Richtung

$$\underbrace{\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{x} - m\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{f}} = \lambda \mathbf{x}}$$

2 Unbekannte in 1 Glg.

$$\lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{x} - m\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

$$\lambda = \frac{-\mathbf{f} \cdot \mathbf{x} + m\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

1 Unbekannte in 1 Glg. lösen

$$\hat{\mathbf{f}} = \lambda \mathbf{x} \qquad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f} + \hat{\mathbf{f}}}{m}$$

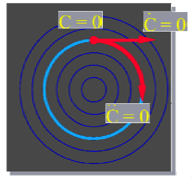
rückwärts einsetzen:

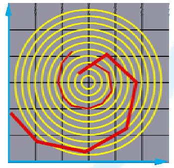
FERTIG?

Punkt auf Kreisbahn

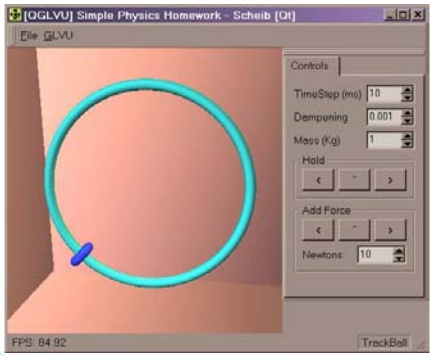
- Drift und Feedback:
  - prinzipiell wäre $\ddot{C} = 0$ hinreichend
  - Problem:
    - Anfangsbedingungen nicht erfüllt
    - Aufsummieren numerischer Fehler
  - Lösung:
    - Dämpfungsterm:

$$\ddot{C} = -\alpha C - \beta \dot{C}$$

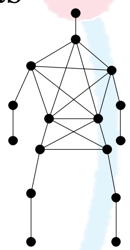




Demo



Partikelsystem mit Constraints



- Wir können 1 Partikel einschränken!
- Als Nächstes ganzes Partikelsystem:
  - verschiedene Constraints
    - Partikel auf Kurve
    - Distanz Constraint
  - hoch dynamisch ... Baukastenprinzip
    - Constraints zur Laufzeit verändern und hinzufügen (ähnlich wie ext. Kräfte)
  - Erweiterung für bisheriges Partikelsystem
  - schnell und stabil

Partikelsystem mit Constraints

- ganzes Partikelsystem in Zustandsvektor **q** [3n]
- Massenmatrix **M** [3n x 3n]
- Inverse Massenmatrix $\mathbf{W} = \mathbf{M}^{-1}$ reziproke Massen [3n x 3n]
- Globaler Kraftvektor **F** [3n]
- m skalare Constraints in $\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$
- Constraint Kraft:
  - lineare Kombination der Constraint Gradienten

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{W} = \mathbf{M}^{-1}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & m_1 & & & & \vdots \\ \vdots & & m_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & m_n & \vdots \\ \vdots & & & & m_n & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & m_n \end{pmatrix}$$

Partikelsystem mit Constraints

- m skalare Constraints in $\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$
- analog vorgehen
- ableiten mit Kettenregel

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$

$$\ddot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} \qquad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}(\mathbf{F} + \hat{\mathbf{F}})$$

$$\ddot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\mathbf{W}(\mathbf{F} + \hat{\mathbf{F}})$$

$$\mathbf{J}\mathbf{W}\hat{\mathbf{F}} = -\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{F}$$

- **J** besteht aus Gradienten der Constraints
  - Gradienten sind Normalen zu den constraint Hyperflächen
  - Normalen Spannen den Raum illegaler Zustandsänderungen auf

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{C} = 0 \\ \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad \ddot{\mathbf{C}} = 0 \end{array}}$$

Jacobi:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} \quad \dot{\mathbf{J}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial C_m}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial C_m}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial C_m}{\partial \mathbf{x}_n} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{q} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)^T$ $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)^T$ $\mathbf{W} = \mathbf{M}^{-1}$ $\mathbf{M} = \mathrm{diag}(m_1, m_1, m_1, \ldots, m_n, m_n, m_n)$

Partikelsystem mit Constraints

- Wie zuvor:
  - Prinzip der virtuellen Arbeit
- Legale Geschwindigkeiten:
  - alle Vektorprodukte = 0 [*cos*(90) = 0]

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

- Constraint Kraft soll keine Arbeit verrichten:

$$\boxed{\hat{\mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}}$$

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \forall \dot{\mathbf{q}} \mid \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

Lineare Kombination der Gradienten $\boxed{\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}}$ **Vektor [m]**

$$\boxed{T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}} \quad \boxed{\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f} + \hat{\mathbf{f}}}{m}}$$

$$\boxed{\dot{T} = m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \underbrace{\hat{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}_{=0}}$$

$$\hat{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\dot{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \forall \dot{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{f}} = \lambda \mathbf{x}}$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} \quad \dot{\mathbf{J}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial C_m}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial C_m}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial C_m}{\partial \mathbf{x}_n} \end{pmatrix}$$

Partikelsystem mit Constraints

- $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}$ einsetzen

$$\underbrace{\mathbf{J}\mathbf{W}\hat{\mathbf{F}} = -\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{F} \qquad \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}}$$

$$\mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} = -\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{F}$$

Gleichungssystem mit m Unbekannten

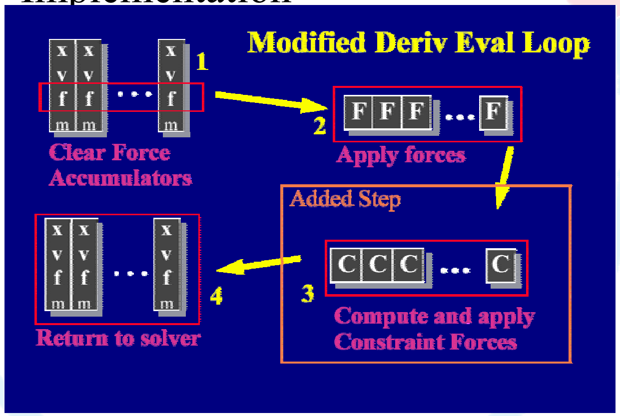
[m x m]-Matrix, Dimension m von C

- Anti-Drift
  - Feder- und Dämpfungskonstante

$$\ddot{\mathbf{C}} = -k_s \mathbf{C} - k_d \dot{\mathbf{C}}$$

$$\mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} = -\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{F} - k_s \mathbf{C} - k_d \dot{\mathbf{C}}$$

Implementation

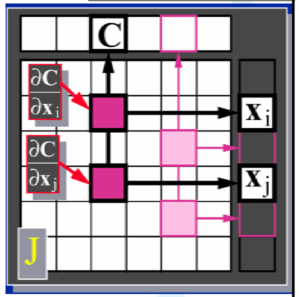


Implementation

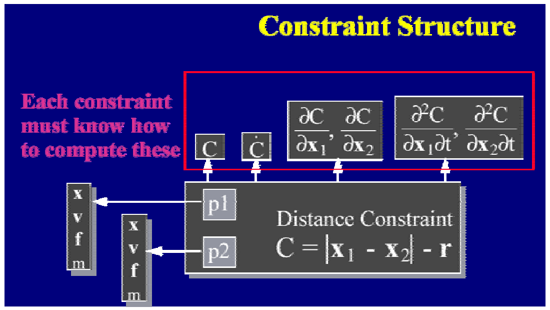
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial C_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial C_m}{\partial x_1} & \frac{\partial C_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial C_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Jacobi Matrix:
  - Jedes Constraint liefert einen oder mehrere Blˆ cke
  - Sparsity: viele leere Blˆ cke
    - Bin‰re Constraints
- Modular:
  - Jedes Constraint berechnet seine Blˆ cke
  - Jedes Constraint stellt die nˆ tigen Funktionen bereit f, r

$C \quad \dot{C} \quad J \quad \dot{J}$



Implementation



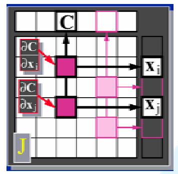
Implementation

- Globale Datenstrukturen
  - Vektoren:
  - Sparse Matrizen:
    - verkettete Liste der wenigen Blˆ cke
- Erstellung:
  - Loop , ber alle Constraints und deren Funktionen

m skalare Funktionen

$C \quad \dot{C}$

$J \quad \dot{J}$



Implementation

- Lineares System der Form **Mx** = **b**

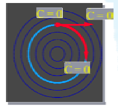
$$\mathbf{JWJ}^{T}\lambda = -\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{JWF}$$

- L¨sen: minimiere **(Mx - b) (Mx - b)**
  - Conjugate Gradient
    - least squares L¨sung f¸r ¸berbestimmte Systeme
    - toleriert redundante Constraints
- Constraint Kraft und Paritkelbeschleunigung berechnen:

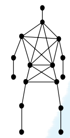
$$\boxed{\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{J}^{T}\lambda} \quad \boxed{\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}(\mathbf{F} + \hat{\mathbf{F}})}$$

- Fertig!

R¸ckblick



- Prinzip an Beispiel kennengelernt
  - Punkt auf Kreisbahn
- Verallgemeinerung
  - Partikelsystem mit Constraints
    - verschiedene Constraints
      - Partikel auf Kurve
      - Distanz Constraint
    - hoch dynamisch ... Baukastenprinzip
      - Constraints zur Laufzeit ver%ndern und hinzuf¸gen (%hnlich wie ext. Kr%fte)
    - in bisheriges Partikelsystem integriert
    - schnell und stabil

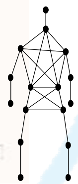


The particle/stick configuration used in Hitman for representing the human anatomy

Quellen

- http://www-2.cs.cmu.edu/~baraff/sigcourse/
- http://www.scheib.net/school/259/hw3/
- http://www.ioi.dk/Homepages/thomasj/publications/gdc2001.htm
- http://www.hitman2.com

Film



The particle/stick configuration used in Hitman for representing the human anatomy